

CARLO FELICE MANARA

Pedagogia della matematica

Estratto dal volume :

L'educazione scientifica

*Atti del VI Convegno di Scholé - Centro di studi pedagogici
fra Docenti Universitari Cristiani - Brescia 1960*

“LA SCUOLA,, EDITRICE

Brescia, 1962, pagine 232

SULLA PEDAGOGIA DELLA MATEMATICA

I. CARATTERI DEL PENSIERO MATEMATICO MODERNO

La necessità che un piano di insegnamento della Matematica sia concretato in un incontro tra matematici, logici e psicologi viene esplicitamente riconosciuta nel rapporto del « Meeting of European Centres of educational Research » del 1959. Voglio limitarmi a sottolineare qui la parte che più mi interessa, cioè la affermazione della necessità dell'intervento dei matematici per la stesura di un piano cosiffatto, perché è indispensabile che l'insegnamento sia orientato dai concetti direttivi e dalle idee fondamentali della scienza che si deve insegnare.

Vale la pena di osservare che la Matematica moderna ha assunto da qualche decennio un tale carattere, ha variato la sua fisionomia in un modo così radicale che appare molto utile dare anzitutto uno sguardo d'assieme agli indirizzi fondamentali del pensiero e della ricerca prima di occuparsi di problemi pedagogici. Invero nel campo della scienza si può affermare che la accettazione supina ed acritica di una tradizione e l'adozione di un metodo pedagogico conforme allo sviluppo storico può portare spesso fuori strada; lo sviluppo dei concetti e delle teorie che si verifica storicamente non è affatto detto sia il più « naturale » nel senso che si vuol dare a questa parola; spesso la scienza usa di concetti complicati e di costruzioni macchinose per lungo tempo, e soltanto dopo lungo brancolare nel buio giunge a dare un concetto veramente « semplice » e chiaro, comprensivo e generale.

Sarebbe impossibile tentare qui una analisi ed una spiegazione di questo fenomeno, perché dovremmo addentrarci nell'esame storico della ricerca scientifica e della costruzione delle teorie scientifiche; ci limiteremo pertanto a portare qualche esempio a conforto della nostra affermazione.

Pensiamo soltanto alla estrema eleganza che la teoria dei numeri complessi ha dato all'Algebra tradizionale, alla estrema profondità che

i concetti della Geometria Proiettiva hanno dato alle visioni della Geometria tradizionale.

Si dovrebbe inserire qui un altro insieme di osservazioni e di considerazioni che riguardano la influenza della invenzione di simbolismi e di tecniche adatte per la rappresentazione degli enti matematici, ma dobbiamo limitarci a qualche rapido cenno.

Si pensi alla Matematica dei Greci e dei Romani ed alla influenza che ebbe su di essa la mancanza di convenzioni comode e ragionevoli per la rappresentazione dei numeri interi. Si può asserire che soltanto quando nel mondo occidentale si fece strada una convenzione veramente elegante e semplice per rappresentare i numeri la Matematica iniziò il suo sviluppo nel clima del Rinascimento.

Per metterci dal punto di vista che più ci interessa qui, potremmo fare qualche osservazione a proposito delle cose che noi insegnamo nella scuola elementare e media: oggi noi iniziamo l'insegnamento facendo apprendere ai ragazzi un sistema formale che è complicato, perchè ha la struttura di un « anello », se si tratta dell'insieme dei numeri interi oppure di un « campo di razionalità », se si tratta dell'insieme dei numeri razionali. Se invece volessimo classificare le strutture formali dell'Algebra attraverso il numero delle operazioni, o con una « scala delle complicazioni » se per es. dovessimo « inventare » oggi un'Algebra non credo che vi sia dubbio nella risposta: dovremmo iniziare con i sistemi più semplici che hanno una sola operazione di composizione, cioè in quei sistemi che vengono chiamati oggi « gruppi ».

Come è noto il concetto di « gruppo » si è fatto luce nella scienza matematica soltanto verso la metà dello scorso secolo: per secoli la Matematica ha lavorato con concetti più complicati e complessi, con formazioni più difficili da imparare e da manovrare.

Un analogo fenomeno si presenta nella Geometria: la Geometria euclidea, che ci appare come una magnifica costruzione, è stata il frutto maturo di una civiltà scientifica precedente, della quale tuttavia non ci restano che pochi indizi. A noi oggi essa appare semplice e chiara, si presenta addirittura come il paradigma della chiarezza; tuttavia è ormai fuori dubbio che quella che appariva una schematizzazione « naturale » ed unica delle nostre esperienze spaziali è invece nata dal confluire e dal sovrapporsi di astrazioni, di concetti sorti da esperienze le più svariate: di carattere visivo, di carattere tattile e muscolare, ecc.

Soltanto una analisi più profonda ha portato alla luce in quella che ci appariva una teoria unitaria, varie stratificazioni concettuali; soltanto una analisi logica e psicologica accurata (eseguita in questi ultimi decenni) ha portato a distinguere le varie origini dei concetti della Geometria, a distinguere vari piani di difficoltà e di complicazione.

Oggi sappiamo che un'altra scienza, la Topologia, studia i concet-

ti veramente basilari della intuizione geometrica, concetti che sono molto più immediati da capire e molto più facili da maneggiare di quelli della Geometria euclidea.

Forse se noi dovessimo oggi «inventare» una scienza dello spazio non inventeremmo la Geometria euclidea, ma procederemmo in modo molto più graduale e facile, senza mescolare nozioni metriche e grafiche, oppure nozioni di competenza della Geometria simile con altre di competenza della Topologia.

Sono ben conscio di quanto valgano i ragionamenti storici basati sui «se»; il mio scopo è quello di tentare di dimostrare che è necessario studiare la struttura della Matematica moderna per impadronirsi delle nozioni veramente basilari di essa, è necessario seguire i logici matematici nelle loro ricerche in quanto queste mettono in luce i concetti elementari ed i procedimenti per così dire «atomici» del pensiero matematico. In altre parole, occorre studiare le moderne tendenze della Matematica perchè, stante la enorme massa di risultati e di convenzioni che dobbiamo insegnare per insegnare la Matematica, occorre trovare i «crocicchi fondamentali» da cui si dipartono le vie maestre concettuali.

Appare ragionevole il ritenere sorpassata la convenzione della Matematica come «scienza della quantità» che ha dominato per millenni e ancora oggi è nelle idee di molti che hanno della Matematica soltanto una conoscenza superficiale o la conoscono soltanto in quanto ne fanno uso nelle applicazioni; tale definizione portava ad una successiva suddivisione in «scienza della quantità discreta» (Aritmetica) e «scienza della quantità continua» (Geometria).

I problemi posti dalla scienza di oggi, le applicazioni sempre più estese degli strumenti matematici da una parte, le analisi sempre più approfondite dei logici e dei filosofi dall'altra hanno portato a un concetto molto più generale e profondo della Matematica. Oggi il Matematico studia tanto un problema di strategia, come il funzionamento di una macchina calcolatrice; oggi sappiamo che i fenomeni più svariati, per es. il comportamento di ciò che è stato chiamato lo «Homo oeconomicus», la pianificazione di un esperimento, il gioco del caso, possono essere formalizzati con sistemi di simboli, ognuno dei quali dà luogo ad una sua «Algebra» particolare. Questa può non avere nulla a che vedere con la Algebra classica ed ha in comune con questa soltanto il fatto di avere certe leggi formali che permettono di sostituire il simbolo al simbolizzato e di concludere con perfetto rigore, giungendo alla soluzione non soltanto di un determinato problema, ma anche di ogni altro problema che si possa schematizzare negli stessi termini.

Da parte sua la Geometria euclidea non ha più quel significato e quel valore assoluto che le si attribuiva una volta; l'affermarsi della

Geometria non euclidea come sistema logico perfettamente coerente ha chiarito molte idee sulla coincidenza tra Geometria euclidea e « Geometria naturale » dello spirito umano. Le applicazioni che la Fisica Matematica (per es. con la Teoria della Relatività) ha dato dei concetti della Geometria non euclidea hanno anche permesso di chiarire quale sia la genesi dei concetti della Geometria.

Infine la Fisica ha contribuito per parte sua a demolire il concetto newtoniano-euclideo della rappresentazione meccanicistica del mondo, accettando anzitutto la discontinuità delle grandezze fisiche e poi certi strumenti matematici che non sarebbero stati annoverati come « ortodossi » qualche tempo fa. L'uso di Algebre non commutative nella rappresentazione dei fatti fisici nella meccanica ondulatoria, l'uso di altri strumenti matematici come matrici (finite o no), quaternioni, numeri di Cayley ecc. ha mostrato sempre più che ciò che interessa non è il contenuto ma il procedimento di tipo matematico; ha svuotato il carattere per così dire « metafisico » dei concetti forniti dalla Matematica per accentuare il carattere strettamente strumentale di essa.

Tutto ciò che abbiamo detto fin qui (ed altri molti argomenti ed esempi che potrebbero essere apportati) porta ad una conclusione che si potrebbe formulare in modo schematico dicendo che la Matematica è caratterizzata non tanto dal suo contenuto e dal suo oggetto (quantità continua o discreta, secondo la concezione antica ed acritica) ma piuttosto dal suo procedimento caratteristico, che consiste nella simbolizzazione (conseguente ad una astrazione ben eseguita) e nella deduzione rigorosa sulla base dei simboli introdotti.

Questi simboli potranno essere quelli dell'Algebra classica se si tratta di un problema quantitativo, potranno essere quelli dell'Algebra di Boole o dello *Aussagenkalkül* se si tratta di un problema di logica, di un'altra Algebra diversa (di volta in volta inventata in modo opportuno) se si tratta di un altro problema.

Osserviamo infine che fino a poco tempo fa il concetto di « soluzione di un problema » veniva più o meno esplicitamente fatto coincidere con quello di « espressione delle soluzioni mediante formule »; oggi si può dire che anche qui è stato allargato l'orizzonte e che si giunge a considerare come soluzione qualunque procedura razionale che conduca a delle informazioni sul problema.

Tale procedura può essere quella della espressione mediante formule, come la possibilità di impostare il calcolo dei risultati numerici in un calcolatore elettronico oppure la pianificazione di tentativi. L'affermarsi dei cosiddetti « metodi Monte Carlo » per eseguire calcoli complicati con l'ausilio di calcolatori elettronici è un sintomo abbastanza chiaro di questo cambiamento di indirizzi e di mentalità.

Da questi punti di vista abbastanza nuovi si comprende come vi sia stato chi ha voluto schematizzare l'assenza del procedimento matematico « di routine » nel « cifrare e decifrare ». E parlo del procedimento « di routine » perchè escludo ovviamente da queste considerazioni ogni tentativo di analisi dell'atto di invenzione matematica, atto troppo complesso ed ancora poco analizzato e che comunque resta fuori del campo delle considerazioni di cui qui ci vogliamo occupare.

2. VALORI DEL PENSIERO E DELLA FORMAZIONE MATEMATICA

La breve analisi che abbiamo fatto fin qui ci ha condotti ad afferrare alcuni punti fondamentali caratteristici della mentalità e del ragionamento matematico. Questi punti dovranno essere tenuti presenti quando vengono impostati i problemi di didattica; ma prima di dedicare qualche breve considerazione a questo aspetto delle questioni vale la pena di spendere qualche minuto nella considerazione del significato e del valore del pensiero matematico e quindi del valore dell'insegnamento della Matematica.

Ciò che abbiamo detto poco fa mostra abbastanza chiaramente che il linguaggio matematico sta diventando il linguaggio comune di moltissime scienze, che hanno trovato nella precisazione dei dati quantitativi e nella elaborazione mediante gli strumenti matematici le armi fondamentali di conquista della verità.

Una analisi solo poco più approfondita porta a concludere che la Matematica ha fornito e fornisce non soltanto il linguaggio e lo strumento esteriore di molto pensiero scientifico, ma anche dà la struttura metodologica della ricerca e della costruzione teorica. Chi ha qualche nozione sulla crisi della Matematica verso la fine del secolo scorso e conosce le soluzioni di quella crisi sul piano logico e filosofico può ben riconoscere che i caratteri delle stesse soluzioni sono passati come elementi vitali nelle altre scienze.

Per esempio la esigenza delle « definizioni operative » nella Fisica, le idee fondamentali della analisi positiva dei concetti sono state ereditate dalla mentalità matematica: si pensi alla Teoria della Relatività che dalla Analisi Tensoriale prende gli strumenti fondamentali per la formulazione delle sue leggi e dalla famosa « Dissertazione inaugurale » di Klein eredita (anche se non in modo esplicito e confessato) la tecnica della ricerca della obiettività attraverso la ricerca degli « invarianti » che rimangono attraverso i cambiamenti dei sistemi di riferimento; idea questa che aveva ispirato il grande Geometra tedesco nella classificazione delle varie Geometrie.

Non fa quindi meraviglia che il Piaget usi il concetto di « gruppo » per classificare alcune attività mentali: questa è una ulteriore dimostrazione della potenza di una scienza che sta diventando ogni giorno di più ispiratrice e modello di una grande parte del sapere umano.

Ma il valore della Matematica può essere considerato anche da un altro punto di vista, non meno importante per i nostri scopi: si tratta della osservazione che lo studio e la pratica della Matematica possono avere un grande valore formativo sui giovani, valore che è stato forse finora abbastanza trascurato e che dovrebbe essere messo più in luce in futuro.

Non sono l'unico ad osservare che la formazione matematica dà abitudine alla chiarezza mentale ed alla precisione e semplicità di espressione; l'esercizio della Matematica allena al ragionamento rigoroso, alla abitudine del controllo e della verifica, alla enunciazione precisa e non sfumata.

Inoltre l'abitudine alla astrazione costituisce una necessaria abitudine per ogni ragionamento che voglia essere portato sul piano logico e la abitudine all'uso dei simboli, oltre alla univocità di rappresentazione allena alla assoluta onestà nelle conclusioni, che vengono raggiunte ed accettate in forma — per così dire — « vuota » e quindi indipendente dal loro contenuto.

Non posso fare a meno di citare quanto il Chisini scrive nella prefazione del suo *Corso di Geometria*: « ... l'abito mentale logico è del tutto necessario per ogni forma di attività scientifica ed il clinico, per esempio, non ne ha meno bisogno dell'ingegnere... Questa mentalità non si improvvisa ma si sviluppa attraverso una severa ginnastica del pensiero... ».

Si badi che non si vuole affatto qui sminuire quanto di formativo possa essere negli studi di carattere umanistico; anzi si potrebbe affermare che una formazione ed una cultura umanistica sono assolutamente necessarie per evitare che il pensiero resti eccessivamente affascinato dal carattere di certezza assoluta, di perfetta trasparenza dei concetti matematici; per evitare che l'uomo si faccia un'idea errata sulla onnipotenza della tecnica e si abitui a « maneggiare le cose senza comprenderle » come dice giustamente Maritain; per evitare infine che si perda la dimensione umana dei problemi e delle questioni e si ignorino (o ci si abitui a dimenticare) i limiti della tecnica e della scienza. Tuttavia se vogliamo formare degli uomini che abbiano un equilibrio mentale e morale occorre che la formazione umanistica non dimentichi quanto di altamente formativo, nel senso tecnico, culturale ed umano si può cavare dallo studio della Matematica.

3. ORIENTAMENTI GENERALI DELLA DIDATTICA MATEMATICA

Dalle osservazioni che abbiamo fatto in precedenza sui caratteri del pensiero matematico e sul valore, informativo e formativo, della Matematica possiamo trarre alcune idee direttive fondamentali sulle esigenze della didattica della Matematica stessa. Esamineremo qui le idee direttive generali, demandando ad un secondo tempo la discussione delle difficoltà e la eventuale impostazione tecnica relativa alle varie classi ed alle varie età.

Abbiamo visto che insegnare la Matematica significa sostanzialmente insegnare la simbolizzazione ed il ragionamento rigoroso in base a simboli.

La scorsa che abbiamo dato in precedenza fa pensare che non siano impossibili dei progressi rispetto allo stato attuale della didattica, progressi che potrebbero avvenire essenzialmente in due direzioni: nell'ampliamento delle idee su ciò che si intende come Matematica e nella semplificazione e facilitazione degli insegnamenti. Questi due scopi, in apparenza contraddittorii tra loro, potrebbero benissimo essere conseguiti tenendo presente ciò che abbiamo detto a proposito della analisi logica delle idee fondamentali della Matematica e della analisi psicologica nella formazione di esse.

E' infatti da escludersi un ampliamento dei programmi attuali di insegnamento, se si mantengono le cose nello stato attuale; ma appare possibile un sostanziale miglioramento della situazione quando si entri nell'ordine di idee di insegnare veramente le idee direttive della Matematica e cercare di formare il tipo del ragionamento matematico.

A quest'ultimo scopo potrebbero servire anche insegnamenti ed esercizi a cui non si pensa abitualmente. Pensiamo (e non soltanto scherzosamente) ai giochi di ragionamento e strategia (per esempio Bridge) ai giochi fondati su regole fisse e su configurazioni determinate (scacchi, dama, ecc.) ad esercizi che allenino al ragionamento, alla induzione, al vaglio metodico delle ipotesi e delle soluzioni, alla programmazione dei tentativi, ecc. In questo ordine di idee si potrebbe affermare un po' paradossalmente che si possono fare lezioni di Matematica anche su una Rivista di enigmistica, forse più utili, ai fini dello sviluppo di questa mentalità, delle lezioni che si fanno sui libri e sugli esercizi abituali.

Credo sia capitato a tutti di osservare magnifici esempi di mentalità matematica presso certi uomini di cultura e di pensiero che affermano di non avere mai capito la Matematica. Costoro sono stati allontanati dallo studio di questa scienza non dai concetti e dai metodi della vera Matematica, ma da un formalismo che è stato presentato in modo

talmente arido e scostante da ingenerare un complesso di inferiorità e di odio quasi insuperabile.

Qui si inserisce in modo del tutto naturale la urgenza di provvedere ad un sostanziale miglioramento della cultura dei maestri elementari in questo campo, cultura che appare inadeguata, soprattutto se vista alla luce delle conoscenze odierne sulla psicologia dell'apprendimento.

Certo appare necessario salvare anche un altro aspetto della Matematica: l'aspetto di linguaggio rigoroso, avente una « ortografia », una « grammatica » ed una « sintassi » rigorosissime, certo le più rigorose tra quelle che il discente deve apprendere in tutta la sua carriera scolastica. E' ben noto infatti che è possibile fare un discorso comprensibile in una lingua anche non rispettando tutte le regole della grammatica e della sintassi; talvolta anche il discorso è più efficace, come ben lo mostrano gli esempi tratti dalla letteratura di tutti i paesi. Ma non è possibile permettersi neppure un minimo errore nella scrittura di un « discorso » matematico, senza cambiare totalmente il senso di ciò che si vuole comunicare.

Tuttavia appare estremamente utile che l'allenamento al rispetto delle regole di linguaggio non prenda la parte principale dell'insegnamento in vista di un determinato scopo. Tutti ricordiamo certi odiati esercizi sulle frazioni, certe interminabili espressioni e certi calcoli algebrici puramente formali che hanno contristato i primi nostri passi nello studio della scienza. Osserviamo inoltre che, oltre a contristare, una impostazione di questo tipo conduce alla idea che la Matematica si riduca ad un insieme di vuoti e noiosi formalismi, conduce a pensare che non vi sia nulla dietro, e fa perdere di vista il fatto che tutto ciò si impara soltanto come mezzo di espressione.

Tante volte sono stato tentato di pensare che Biagio Pascal, il quale si era ricostruito la Geometria fino alla 32^a proposizione di Euclide e che, a detta del suo biografo, non conoscendo la nomenclatura ufficiale usava le parole « rond » per indicare un cerchio e « barre » per indicare la retta (PASCAL, *Oeuvres complètes*, pag. 5) rischierebbe di essere (se non bocciato) certo severamente rimproverato da certi maestri che conosco, che fanno dell'insegnamento della Matematica semplicemente l'insegnamento di un certo linguaggio convenzionale (non sempre opportuno e del tutto necessario) e di regole vuote.

4. METODO ATTIVO

Ciò che abbiamo detto poco fa sulla necessità di superare il formalismo o almeno di non ridurre la Matematica al puro formalismo porta spontaneamente il discorso sul metodo di insegnamento che viene

chiamato « metodo attivo »; le caratteristiche sue principali si potrebbero descrivere dicendo che con tale metodo si cerca di condurre il discente alla costruzione attiva della scienza ed a possederne i concetti come una costruzione propria ed autonoma.

Se un programma di questo tipo appare come il programma ideale dell'insegnamento per tutte le materie, possiamo notare che per la Matematica esso appare, se è possibile esprimersi così, l'ideale degli ideali.

Ma perchè sia possibile applicare un metodo cosiffatto nell'insegnamento appaiono necessarie due condizioni fondamentali: anzitutto che siano accuratamente esaminate le capacità mentali del discente; in secondo luogo che l'insegnante abbia per parte sua acquisito una determinata mentalità e un certo allenamento, una formazione tecnica ed un atteggiamento mentale e spirituale.

Sarà forse banale ciò che sto per dire, ma vale forse la pena di ripeterlo: l'insegnamento attivo della Matematica non può pretendere di far raggiungere al discente ciò che egli non è capace di afferrare.

Sappiamo tutti che i giovani hanno una memoria molto pronta e tendono spesso a fidarsi di quella, senza fare lo sforzo di cercare di capire e di possedere ciò che ripetono tanto bene; gli esempi che si possono portare sono innumerevoli e si riferiscono a tutti i gradi di scuola. Nella scuola elementare tanti maestri e maestre credono di avere la classe « più avanti » dei colleghi e non si accorgono di avere istruito dei pappagallini più sapienti (come pappagallini ma non come uomini) degli altri. Nella scuola media (inferiore e superiore) certi virtuosismi con i radicali oppure con i metodi per la discussione dei problemi di secondo grado, certe abilità con la Trigonometria e con la Geometria Analitica si rivelano ad un esame anche molto breve ma che miri ai concetti, e non alle parole, come degli « addestramenti » puramente formali. Questo per non dire che anche nella Università alcuni 30 sanzionano la ripetizione infallibile ma non un possesso completo della materia di un corso monografico superiore.

Pertanto la didattica secondo il metodo attivo richiede anzitutto, per essere seria, una esatta conoscenza dei processi mentali di formazione dei concetti, di apprendimento e di capacità di livello di astrazione e formalizzazione. Il materiale di ricerche psicologiche che ormai sta accumulandosi non può essere ignorato; inoltre occorrerebbe pianificare una collaborazione tra psicologi e insegnanti per lo scambio di informazioni metodiche e per un costante ritocco delle metodologie.

Da parte dell'insegnante il metodo attivo richiede una formazione morale e tecnica, un atteggiamento mentale e una cultura che non sono facili da ottenersi e soprattutto devono essere voluti e cercati attivamente e con fatica.

Infatti il metodo attivo richiede anzitutto una conoscenza molto approfondita non soltanto della propria materia, ma anche degli elementi di psicologia.

La propria materia (per quanto possa sembrare anche questo un enunciato ingenuo) deve essere posseduta non solo nell'aspetto formale ma anche e soprattutto nelle sue idee direttive, perché il discente possa essere guidato nella ricerca sulla strada giusta, e non sovraccaricato di un bagaglio inutile o anzi dannoso.

Anche in questo campo sarebbe facile portare una esemplificazione abbondante di molti sviluppi formali, di molte nozioni e convenzioni che potrebbero essere tralasciate senza perdita, anzi con guadagno del discente.

La psicologia dovrebbe essere conosciuta per guidare il discente lungo le strade « naturali » dell'apprendimento, cercando di non forzare in nessun modo la sua mente e di non fargli compiere dei salti di cui è incapace.

E' osservazione molto comune che il contenuto dei programmi o almeno il modo comune di svolgerli è superiore alle capacità mentali medie delle scolaresche. Osservazioni fatte all'estero hanno accertato per esempio che manca addirittura la conoscenza del vocabolario, per cui il discente ripete troppo spesso delle parole che conosce soltanto ad orecchio, senza mai essersi domandato il significato, o senza mai aver chiesto spiegazioni. Molte conversazioni con Colleghi insegnanti mi hanno convinto che il caso si verifica quotidianamente anche da noi; il che ho potuto d'altronde constatare nelle mie esperienze di esaminatore.

Ma l'atteggiamento dell'insegnante ha significato anche nel suo aspetto morale: infatti l'insegnamento attivo richiede una fatica molto maggiore dell'insegnamento di tipo classico e richiede inoltre un atteggiamento di vigile attesa e di umiltà, di rispetto della personalità del discente che non è richiesto — o almeno non nella stessa misura — dall'atteggiamento classico dell'insegnante.

Si tratta di conoscere e di accettare il fatto che ognuno può avere un suo modo per raggiungere la verità; saper spiare ed attendere il momento in cui una determinata sistemazione può essere fatta propria dal discente, e non imporla dall'esterno con l'autorità. Si tratta infine di conciliare queste esigenze di rispetto con l'insegnamento delle convenzioni di linguaggio ormai accettate e consuete.

5. PROBLEMI PRATICI

Ciò che abbiamo detto fin qui costituisce in certo modo un ritratto ideale del pensiero matematico e del suo insegnamento. Non vorrei si pensasse che tutto ciò andrebbe bene per un Biagio Pascal (unico e solo) a cui faccia da maestro il padre, colto, intelligente, e soprattutto dotato dell'amore e della stima di un padre.

E' possibile sperare di poter in qualche modo dare un principio di realizzazione di questo quadro ideale (qualora venga accettato)?

Ritengo che già il prendere conoscenza di un determinato problema sia un atteggiamento attivo, per persone di buona volontà. E se avremo ottenuto di fare prendere conoscenza del fatto che esiste un urgente problema dell'insegnamento della Matematica in Italia, nelle scuole di ogni grado, sarà già un grande passo avanti.

Le ricerche per un inizio di soluzione potrebbero essere indirizzate in due direzioni: una di carattere teorico e una di carattere pratico.

Dal punto di vista tecnico ripeto che appare molto utile una collaborazione stretta tra matematici, psicologi, pedagogisti e logici per la retta impostazione teorica delle questioni.

E' noto che esiste una commissione internazionale per l'insegnamento della Matematica e che esiste un Comitato nazionale che fa parte di tale commissione. Possiamo osservare tuttavia che sarebbe opportuno che della cosa non si occupassero soltanto i matematici, ma che fosse accelerata la collaborazione tra studiosi di tutte le discipline che ho nominato poco fa. Invero il pedagogista da solo può ignorare il significato e l'importanza di certi schemi teorici, il matematico da solo può non conoscere le capacità di apprendimento nelle varie età, il logico da solo può inseguire soltanto un ideale di correttezza formale distaccato dalla concreta realtà psicologica.

Dal punto di vista pratico, ritengo urgente e possibile una azione che si rivolga agli insegnanti di ogni ordine e grado per svegliare in loro la conoscenza di questi problemi.

Ho già avuto occasione di fare qualche osservazione a proposito della scuola elementare. Mi pare che sia qui il punto più dolente della situazione e certo non per mancanza di volontà e di passione da parte del corpo insegnante, ma per una inadeguata cultura specifica e per mancanza di sensibilizzazione dell'ambiente. Non si richiede che i maestri sappiano più Matematica; sarebbe forse augurabile, ma non è strettamente necessario. Sarebbe invece augurabile che la sappiano meglio e più profondamente. Non si tratta quindi di cambiare i programmi di insegnamento delle scuole magistrali, ma di insegnare meglio ai maestri e tenere questi aggiornati, per evitare almeno gli

errori più marchiani che si sentono insegnare e si leggono (purtroppo) sui libri di testo e per evitare che i bambini siano caricati di nozioni superflue o dannose (nel senso intellettuale del termine).

Per la scuola media sarebbe possibile fare un discorso perfettamente analogo; insisto sul fatto che si tratta qui di una ispirazione generale, di uno stile di insegnamento e che pertanto il problema non è tanto o soltanto un problema di programmi e di metodi ma è soprattutto un problema di uomini.

Abbiamo rilevato che l'insegnamento attivo richiede dall'insegnante una cultura, una passione, un impegno, una fatica molto maggiori di quelli richiesti dall'insegnamento di tipo classico.

Non esiste una bacchetta magica che dia al professore la volontà e la capacità di tutto questo: il problema si sposta sul piano morale su cui non voglio entrare. Noto tuttavia che la formazione culturale fa entrare in scena la responsabilità della scuola universitaria.

Anche qui si dovrebbe dire che è urgente sensibilizzare l'ambiente perchè i pochi colleghi universitari che sentono i problemi della scuola e dell'insegnamento non debbano fare tutto soltanto a spese della propria passione e del proprio spirito di sacrificio.

La formazione culturale di una nazione è problema che investe la responsabilità e la sensibilità di tutti; e non è da escludersi anche l'aspetto economico della questione, cioè non si può dimenticare il fatto che nella gara tra le nazioni civili la migliore utilizzazione del patrimonio di intelligenza che Dio ha dato a ciascuno è pure a sua volta un segno di questa intelligenza ed un dovere morale e civico.

E per concludere su questo piano, che è il piano a cui la scuola deve tendere, mi sia permesso di aggiungere qualche cosa a ciò che ho detto poco fa a proposito della profonda possibilità formativa della Matematica. Invero se questa scienza è insegnata nei debiti modi, invece di disgustare e di ingenerare fastidio e stanchezza insegna l'amore alla verità, dà un senso di contemplazione estetica a livello intellettuale e spirituale che si potrebbe a buon diritto dire unico. E questa nobilitazione della intelligenza attraverso la contemplazione è il fastigio più bello a cui può tendere una attività umana sul piano naturale in questa Terra.

RISPOSTE AGLI INTERVENTI

Rivolgo anzitutto un ringraziamento cordiale ai Colleghi che mi hanno fatto osservazioni o domande perchè mi danno occasione di chiarire il mio pensiero e di migliorarne l'espressione.

Dico subito che il Prof. FLORES D'ARCAIS, dopo di avermi posto una domanda molto pertinente e concreta: « Che posto può avere in un programma la Matematica come io la intendo? » ha risposto da pari suo sul piano dei principi, giustificando pienamente, in modo che io condivido perfettamente, il perchè noi insegniamo la scienza. A me non resta quindi che rispondere sul piano della realizzazione specifica; su questo piano riconosco anzitutto che la mia « boutade » sulla « enigmistica » aveva una intenzione paradossale, mirante ad un effetto di choc. Ottenuto questo effetto, penso che sia il caso di riportare le cose ad un assetto più normale ed a tal fine mi valgo della chiarissima impostazione che il Prof. AGAZZI ha dato del problema generale della educazione scientifica distinguendo tre problemi, o — come preferirei dire — tre piani di uno stesso problema:

- 1) il problema delle scienze nell'ambito proprio;
- 2) il problema della educazione scientifica nell'ambito di ciascuna scienza;
- 3) il problema della educazione scientifica nell'ambito generale della educazione dell'uomo.

Anche sul significato della Matematica applicata il Prof. AGAZZI mi ha posto una domanda precisa e pertanto ritengo di dover chiarire il mio pensiero su questo punto, il che mi porterà anche a dare delle spiegazioni ad altri degli intervenuti.

Quando ho detto che la Matematica è caratterizzata non tanto dal suo contenuto quanto dai suoi procedimenti, non ho voluto con ciò stesso intendere che si debbano cambiare i programmi ed insegnare, per es., la enigmistica invece della Aritmetica; anzi sull'argomento dei programmi sono stato molto cauto, preferendo dire che non bi-

sogna tanto cambiare ciò che si insegna (salvo casi speciali), quanto cambiare il modo e la mentalità con cui si insegna.

In questo ordine di idee l'accento alla enigmistica aveva questo significato: dato che il procedimento della Matematica è sostanzialmente la simbolizzazione, accettiamo l'idea che la cifra non è l'unico simbolo atto a simbolizzare qualcosa e che la tavola pitagorica non è l'unica regola per lavorare sui simboli. Quando mi pongo un problema di enigmistica e per es. adopero gettoni colorati per simbolizzare i vari enti di cui tratto e per fare una analisi completa, esauriente e razionale delle varie possibilità e programmare i tentativi e vagliare le ipotesi, ritengo di fare della Matematica, così come la faccio quando risolvo un problema di Aritmetica.

Osservo tuttavia che esiste un patrimonio di informazioni che noi dobbiamo fornire e di nozioni indispensabili alla vita e che pertanto l'Aritmetica pratica mantiene in pieno la sua validità: non possiamo lasciare uscire i ragazzi dalla V elementare che non sappiano fare i conti della spesa o che ignorino il sistema metrico decimale. Ma ricordiamo che non si deve ridurre la Matematica solo a questo e che entrano nel suo campo anche degli altri procedimenti che non si riducono alle operazioni, magari mnemonicamente apprese ed applicate senza che se ne sappia il come ed il perchè.

Rientrano in questo ordine di idee gli interventi della Prof. SARTOR sull'insegnamento attivo e della Prof. ORLANDO sui problemi concreti dell'insegnamento elementare. Il materiale che la Signorina ha citato mostra che in altri Paesi il problema è studiato attentamente, con esperimenti e statistiche, e che si cerca di rispettare le capacità di apprendimento e la spontaneità di formazione dei concetti e di non costringere il bambino a ripetere ciò che non capisce perchè normalmente non può capire.

Per maggiore chiarezza aggiungerò che a mio parere il dire che la Matematica è caratterizzata dai suoi procedimenti equivale a dire che è caratterizzata dalla simbolizzazione e dal lavoro rigoroso sul simbolo; ciò naturalmente non implica che si debba seguire un unico procedimento di simbolizzazione nè che non si debba intervenire quando ci si accorge che il discente, dopo aver scelto un procedimento, non ne segue la logica interna, oppure giunge ad un risultato giusto con un procedimento sbagliato.

Ritengo così di aver risposto anche alla domanda che mi ha posto il Prof. ACAZZI sul valore della Matematica pratica, ossia — dico io — sul valore del contenuto dell'insegnamento matematico. Se così va interpretata la domanda, ripeto che l'insegnamento matematico ha un grandissimo valore, di formazione e di informazione. A questo riguardo mi riattacco a ciò che ho già detto sull'insegnamento at-

tivo: se vogliamo che i concetti siano costruiti dall'interno dobbiamo farli costruire per astrazione da un determinato contenuto concreto, che può benissimo essere il contenuto tradizionale della Aritmetica elementare e della Geometria classica. La Sig.na ORLANDO ha riferito un criterio preciso seguito da un ricercatore americano per tenersi sempre a contatto con la realtà conosciuta dal bambino; si potrà forse discutere tale criterio su altre basi, ma ritengo accettabile il suo principio ispiratore che è quello di riferirsi in ogni caso a ciò che per il bambino può avere un riferimento concreto.

A questo punto si inserisce il discorso sui programmi che ho iniziato poco fa: ritengo che, se ritocchi si faranno, essi vadano fatti nel senso di ricercare la massima aderenza alla capacità di costruzione interiore (e non soltanto di apprendimento o peggio di ripetizione) del discente.

Per quanto riguarda l'intervento del Prof. LAENG, devo dire che forse mi sono espresso poco chiaramente se ho dato l'impressione di una svalutazione *incondizionata* della dimensione storica nell'insegnamento della scienza.

Tuttavia, per quanto riguarda il problema pedagogico ritengo che il metodo attivo significhi non dare dall'inizio una sistemazione logica astratta e già formata, ma partire dal concreto e stimolare il discente ad una sistemazione logica che sia sua e che, per forza di cose, verrà soltanto come coronamento dei suoi sforzi e come punto di partenza per sue successive conquiste. Ragioni pratiche, e precisamente quell'aspetto insopprimibile di « informazione » che la Matematica non può non avere, consigliano di guidare il discente nella direzione che lo porti a sfociare nelle convenzioni abituali di linguaggio della nostra abituale Matematica.

Si noti, per accidens, che dico « abituale » e non « naturale », perchè penso che molta parte delle conoscenze matematiche che formano ormai il tessuto fondamentale della nostra vita di relazione sia convenzionale. Molte di queste conoscenze potrebbero essere atteggiate in modo diverso, ma ormai siamo in questo ambiente culturale, abbiamo questo linguaggio e quindi dobbiamo desiderare che i giovani lo imparino e lo usino.

Questa sostanziale convenzionalità non ha nulla a che vedere con la aderenza alla realtà che può avere un linguaggio.

Mi pare di poter ripetere che il cammino della scienza non è lineare e che quindi può essere errato il pretendere di seguire nella pratica didattica il cammino storico, perchè la idea più semplice, più chiara, più generale e comprensiva può benissimo comparire nella Storia dopo secoli in cui la umanità ha adoperato schemi complicati, contorti, macchinosi ed inadeguati.

Io penso che un conto sia parlare di metodo attivo, cioè di formazione autonoma ed attiva dei concetti da parte del discente, ed un conto sia la scelta della strada lungo cui il discente va guidato, perchè il seguire in questo pedissequamente lo sviluppo storico di una scienza può portare a confusioni ed oscurità.

Il Prof. LAENG ha citato Enriques, Maestro che io ammiro sconfinatamente anche per la dimensione umanistica della sua cultura e del suo pensiero. Tuttavia ritengo che le ricerche storiche di Enriques avessero la intenzione di ricercare proprio l'emergere delle idee direttive della scienza e che sarebbe mortificare le ricerche di Enriques il valersi della sua autorità per accreditare un metodo storico di insegnamento, come se rispondesse all'unica, naturale linea di sviluppo del pensiero umano.

Avverto infine che ciò che ho detto fin qui vale a mio parere in linea di principio; restano aperte tutte le spinosissime questioni del decidere concretamente la scelta delle idee che vengono ritenute veramente semplici, del discernere le linee maestre fondamentali del pensiero matematico, del riconoscere le mete verso cui dovremo guidare i discenti perchè acquistino attivamente i concetti secondo le linee di minor resistenza.

Con questo ritengo di aver risposto alle questioni che mi sono state poste, per così dire, al primo « livello AGAZZI ». Per quanto riguarda il secondo livello ho ben poco da dire perchè il Prof. d'ARCAIS ha spiegato in modo veramente magistrale, come ho già detto, il perchè della educazione scientifica ed il contenuto di valori che essa può dare. L'apporto è stato ulteriormente ribadito dall'intervento del prof. RIGOBELLO che mi ha trovato pienamente consenziente quando ha parlato della utilizzazione della educazione scientifica come mezzo per la formazione della persona.

Qui entriamo in pieno nel terzo « livello AGAZZI » e non voglio ripetere delle argomentazioni che sono state fatte ampiamente nei giorni scorsi. FLORES d'ARCAIS ha messo bene in luce il posto che ha la scienza nel mondo contemporaneo e i valori che la scienza apporta nella nostra vita; RIGOBELLO ha messo in luce la necessità di appropriarsi attivamente di questi valori per farne un mezzo di elevazione per l'uomo. Si pone qui il problema: come ottenere questo scopo?

Vi è stata a questo proposito una divisione abbastanza netta di opinioni e non credo di poter apportare ulteriori contributi alla precisazione delle rispettive posizioni: basterà quindi che io dichiaro da che parte mi trovo e ciò devo fare per dovere di chiarezza. Pertanto ritengo di dover dire che la posizione del Preside ROCHI mi trova pienamente consenziente; consento con le sue preoccupazioni di ordine teorico, metodologico e pratico. Con questo naturalmente non intendo dire

che si debba ignorare la esigenza espressa dal Prof. PERETTI per la unità della personalità del discente; anzi, dirò di più, ritengo che la educazione scientifica debba avere come coronamento una educazione che per intenderci dirò « sapienziale » del discente. Noi non insegnamo e non vogliamo insegnare soltanto dei contenuti di sapere: vogliamo insegnare un modo di vita, vogliamo portare concretamente i giovani a risolvere nel miglior modo possibile il problema della vita, problema che ognuno di noi deve risolvere, solo davanti a Dio.

Ma proprio a questo fine ritengo che la scienza solo nel rispetto rigoroso dei propri limiti possa preparare la strada al riconoscimento di altri piani di razionalità e di altri valori. Solo nel rifiutarsi di estendere la propria metodologia (anche soltanto con analogie) la scienza può preparare l'animo alla accettazione di altre metodologie che se non si possono dire scientifiche nella accezione ristretta da noi qui adottata, sono in certo senso la maggiore esplicazione della natura intellettuale e razionale dell'uomo.

